Solusi Persamaan Diferensial Biasa

(Bag. 2)

Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

Metode *Predictor-Corrector*

- Metode Heun adalah salah satu metode *predictor-corrector* (P-C)satu-langkah (one-step).
- **Metode satu-langkah** (*one-step*): untuk menaksir nilai $y(x_{r+1})$ dibutuhkan satu buah taksiran nilai sebelumnya, $y(x_r)$.
- Terdapat metode P-C yang multi-langkah (*multi-step*).
- **Metode banyak-langkah** (*multi-step*): perkiraan nilai $y(x_{r+1})$ membutuhkan beberapa taksiran nilai sebelumnya, $y(x_r)$, $y(x_{r-1})$, $y(x_{r-2})$, ...

- Metode P-C multi-langkah:

  predictor : Menaksir y_{r+1} dari y_r, y_{r-1}, y_{r-2},...

  corrector : Memperbaiki nilai y_{r+1} dari *predictor*

- Metode P-C yang banyak ditulis dalam literatur dan kita bahas di sini adalah:

  1. Metode Adams-Bashforth-Moulton.
  2. Metode Milne-Simpson
  3. Metode Hamming

Metode Adams-Bashforth-Moulton

- *predictor* : $y^*_{r+1} = y_r + {}^h/_{24}\ (-9f_{r-3} + 37\, f_{r-2} - 59\, f_{r-1} + 55\, f_r)$
- *corrector* : $y_{r+1} = y_r + {}^h/_{24}\ (f_{r-2} - 5\, f_{r-1} + 19\, f_r + 9f^{*}_{r+1})$

- Galat per langkah metode Adams-Bashforth-Moulton adalah dalam orde $O(h^5)$, yaitu:

predictor : $E_p = Y_{r+1} - y^*_{r+1} \approx {}^{251}/_{720}\ h^5\, y^{(5)}(t)$, $x_{r-3} < t < x_{r+1}$

corrector : $E_p = Y_{r+1} - y_{r+1} \approx {}^{-19}/_{720}\ h^5\, y^{(5)}(t)$, $x_{r-3} < t < x_{r+1}$

- Galat longgokan adalah dalam orde $O(h^4)$. Karena itu, metode Adams-Bashforth-Moulton di atas dinamakan juga **metode Adams-Bashforth-Moulton orde-4**

Metode Milne-Simpson

- *predictor* : $y^*_{r+1} = y_{r-3} + {}^{4h}/_3 \, (2f_{r-2} - f_{r-1} + 2f_r)$
- *corrector* : $y_{r+1} = y_{r-1} + {}^{h}/_3 \, (f_{r-1} + 4 f_r + f_{r+1})$

- Galat per langkahnya adalah dalam orde $O(h^5)$, yaitu:

$$predictor : \; E_p = Y_{r+1} - y^*_{r+1} \approx \frac{28h^5}{90} \; y^{(5)}(t)$$

$$corrector : \; E_p = Y_{r+1} - y_{r+1} \approx \frac{-1h^5}{90} \; y^{(5)}(t)$$

untuk $x_{r-3} < t < x_{r+1}$.

Metode Hamming

$$predictor\ :\ \ y^*_{r+1}\ =\ y_{r\text{-}3} + {}^{4h}/_{3}\ (2\,f_{r\text{-}2} - f_{r\text{-}1} + 2f_r)$$

$$corrector\ :\ \ y_{r+1}\ =\ \frac{-\,y_{r-2}}{8} + \frac{9\,y_r}{8} + \frac{3h}{8}(\text{-}f_{r\text{-}1} + 2\,f_r + f_{r+1})$$

Prosedur Pendahuluan

- PDB hanya mempunyai satu nilai awal, yaitu $y_0 = y(x_0)$.

- Dengan demikian, metode banyak-langkah tidak swa-mulai (*self-start*), sehingga tidak dapat diterapkan langsung, sebab metode tersebut memerlukan beberapa buah nilai awal.

- Inilah kelemahan metode banyak-langkah.

- Misalkan *predictor* mempunyai persamaan

$$y^*_{r+1} = y_r + {}^{h}/_{12}\ (23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2})$$

- Untuk menghitung y^*_3, kita harus mempunyai nilai y_0, y_1, dan y_2 agar nilai

$$f_0 = f(x_0, y_0)\ ,\quad f_1 = f(x_1, y_1)\ ,\quad f_2 = f(x_2, y_2)$$

dapat ditentukan.

- Untuk mendapatkan beberapa nilai awal yang lain, kita harus melakukan prosedur pendahuluan (*starting procedure*) dengan metode PDB yang bebas (biasanya metode Euler, metode Runge-Kutta)

- Jadi, untuk contoh *predictor* di atas, y_1 dan y_2 dihitung terlebih dahulu dengan salah satu prosedur pendahuluan. Selanjutnya, metode P-C dapat dipakai untuk menghitung y_3, y_4, ..., y_n.

Sistem Persamaan Diferensial

- Dalam bidang sains dan rekayasa, persamaan diferensial banyak muncul dalam bentuk simultan, yang dinamakan **sistem persamaan diferensial**, sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
y'_1 &= \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) && , y_1(x_0) = y_{10} \\
y'_2 &= \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) && , y_2(x_0) = y_{20} \\
&\vdots \\
y'_n &= \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) && , y_n(x_0) = y_{n0}
\end{aligned}
$$

- Sistem persamaan diferensial tersebut dapat ditulis dalam notasi vektor sebagai berikut:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad , \quad \mathbf{y}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{y_0}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ . \\ . \\ . \\ y'_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{y_0} = \begin{bmatrix} y_{1_0} \\ y_{2_0} \\ . \\ . \\ . \\ y_{n_0} \end{bmatrix}$$

Semua metode yang telah dijelaskan untuk persamaan tunggal (Euler, Runge-Kutta, dll.) dapat diterapkan pada sistem persamaan di atas.

- **Contoh**: Diketahui sistem PDB orde satu:

$$\frac{dy}{dt} = -0.5\,y \qquad , \quad y(0) = 4$$

$$\frac{dz}{dt} = 4 - 0.3z - 0.1\,y \qquad , \quad z(0) = 6$$

Hitung *y*(0.5) dan *z*(0.5) dengan (a) metode Euler, dan (b) metode Runge-Kutta orde 3. Ambil *h* = 0.5.

Penyelesaian:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5y \\ 4 - 0.3z - 0.1y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y_0} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Sistem PDB di atas dapat ditulis menjadi $\mathbf{y}' = \mathbf{f}\,(t, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(\mathbf{t_0}) = \mathbf{y_0}$

(a) Dengan metode Euler $y_{r+1} = y_r + hf(\, t_r\,,\, y_r)$:

$$y_{r+1} = y_r + hf_1\,(t_r, y_r, z_r)$$
$$z_{r+1} = z_r + hf_2\,(t_r, y_r, z_r)$$
$$t_0 = 0 \;\rightarrow\; y_0 = 4 \text{ dan } z_0 = 6$$
$$t_0 = 0.5 \;\rightarrow y_1 = y(0.5) = y_0 + hf_1(t_0, y_0, z_0) = 4 + (0.5)\{(-0.5)(4)\} = 3$$
$$z_1 = z(0.5) = z_0 + hf_2(t_0, y_0, z_0)$$
$$= 6 + (0.5)\{4 - (0.3)(6) - (0.1)(4)\} = 6.9$$

(b) Dengan metode Runge-Kutta orde-3,

$$k_1 = hf\,(t_r, y_r),$$
$$k_2 = hf\,(t_r + h/2, y_r + k_1/2)$$
$$k_2 = hf\,(t_r+h, y_r - k_1 + 2k_2)$$
$$y_{r+1} = y_r + (1/6)(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$t_0 = 0 \quad \rightarrow \quad y_0 = 4$$
$$t_1 = 0.5 \quad \rightarrow \quad y_1 = ?$$

$$k_1 = hf_1(t_0, y_0, z_0)$$
$$= 0.5\ \{(-0.5)(4)\} = -1$$

$$k_2 = hf_1(t_0 + h/2, y_0 + k_1/2, z_0 + k_1/2)$$
$$= (0.5)\mathrm{f}_1(0.25, 3.5, 5.5)$$
$$= (0.5)\{(-0.5)(3.5)\}$$
$$= -0.875$$

$$k_3 = hf_1(t_0 + h, y_0 - k_1 + 2k_2, \ z_0 - k_1 + 2k_2)$$
$$= 0.5\ \mathrm{f}_1(0.5, 3.25, 6.815)$$
$$= 0.5\{(-0.5)(3.25)\}$$
$$= -0.8125$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y(0.5) = y_0 + {}^{1}/_{6}\,(k_1 + 4k_2 + k_3) \\
&= 4 + {}^{1/}_{6}\,\{-1 + 4(-0.875) + (-0.8125)\} \\
&= 3.114583
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_0 &= 0 \quad \rightarrow \quad z_0 = 6 \\
t_1 &= 0.5 \quad \rightarrow \quad z_1 = ?
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf_2(t_0, y_0, z_0) \\
&= 0.5\,\{4 - (0.3)(6) - (0.1)(4)\} = 0.9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= hf_2(t_0 + h/2, y_0 + k_1/2, z_0 + k_1/2) \\
&= (0.5)\ \mathrm{f}_2(0.25, 4.45, 6.45) \\
&= (0.5)\{4 - (0.3)(6.45) - (0.1)(4.45)\} \\
&= 0.81
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_3 &= hf_2(t_0 + h, y_0 - k_1 + 2k_2,\ z_0 - k_1 + 2k_2) \\
&= 0.5\ \mathrm{f}_2(0.5, 4.72, 6.72) \\
&= 0.5\{4 - (0.3)(6.72) - (0.1)(4.72)\} \\
&= 0.756
\end{aligned}
$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
z_1 &= z(0.5) = z_0 + (1/6)(k_1 + 4k_2 + k_3) \\
&= 6 + (1/6)\,\{0.9 + 4(0.81) + 0.756\} \\
&= 6.816
\end{aligned}
$$

Persamaan Diferensial Orde Lanjut

- Persamaan differensial orde lanjut adalah persaman diferensial dengan orde yang lebih besar dari satu.
- Persamaan diferensial ini dapat ditulis kembali sebagai sistem persamaan diferensial orde-1.
- Misalkan kepada kita diberikan PDB orde-2

  $y'' = f(x, y, y') \quad ; \; y(x_0) = y_0$ dan $y'(x_0) = z_0$
-
- Untuk mengubah PDB orde-2 tersebut menjadi sistem PDB orde-1, misalkan

  $y' = z$

  maka

  $z' = y'' = f(x, y, y') = f(x, y, z) \quad ; \; y(x_0) = y_0$ dan $z(x_0) = z_0$

Dengan demikian, persamaan $y'' = f(x, y, y')$ dapat ditulis menjadi sistem persamaan diferensial biasa:

$$\frac{dy}{dx} = z \qquad , \; y(x_0) = y_0$$

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, y') = f(x, y, z) \qquad , \; z(x_0) = z_0$$

atau dalam notasi vektor:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \qquad ; \mathbf{y}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{y_0}$$

yang dalam hal ini

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad , \; \mathbf{y}' = \mathbf{f} = \begin{bmatrix} z \\ f(x, y, z) \end{bmatrix} \quad , \; \mathbf{y}(\mathbf{x_0}) =$$

- **Contoh**: Nyatakan PDB orde-2 berikut:

$$y'' - 3y' - 2y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \text{ dan } y'(0) = 0.5$$

ke dalam sistem persamaan diferensial biasa orde-1.

Penyelesaian:

Diketahui PDB orde-2:

$$y'' = 3y' - 2y = f(x, y, y')$$

Misalkan

$$y' = z$$

maka

$$z' = y'' = f(x, y, y') = f(x, y, z) = 3z - 2y$$

dan

$$y(0) = 1,$$
$$z(0) = 0.5;$$

sehingga diperoleh sistem PDB orde-1

$$\frac{dy}{dx} = z \qquad , \ y(0) = 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 3z - 2y \qquad , \ z(0) = 0.5$$

atau dalam notasi vektor:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \qquad ; \mathbf{y}(0) = \mathbf{y_0}$$

yang dalam hal ini,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \qquad , \ \mathbf{f} = \begin{bmatrix} z \\ 3z - 2y \end{bmatrix} \qquad , \ \mathbf{y_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Contoh: Nyatakan PDB orde-3 berikut:

$y''' - x + y2 - y' + 3y'' = 0$; $y(0) = 0; y'(0) = 0.5, y''(0) = 1$

ke dalam sistem persamaan diferensial biasa orde-1.

Penyelesaian:

$y''' = x - y2 + y' - 3y'' = f(x, y, y', y'')$

Misalkan

$y' = z$

dan

$y'' = z' = t$

maka

$t' = y''' = f(x, y, y', y'') = f(x, y, z, t) = x - y^2 + z - 3t$

dan

$y(0) = 0,$

$z(0) = 0.5,$

$t(0) = 1;$

sehingga diperoleh sistem PDB orde-1

$$\frac{dy}{dx} = z \qquad , \; y(0) = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = t \qquad , \; z(0) = 0.5$$

$$\frac{dt}{dx} = x - y^2 + z - 3t \qquad , \; t(0) = 1$$

atau dalam notasi vektor

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \qquad , \; \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{y}_\mathbf{0}$$

yang dalam hal ini,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix} \qquad , \; \mathbf{f} = \begin{bmatrix} z \\ t \\ x - y^2 + z - 3t \end{bmatrix} \qquad , \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$